MINIMALE PROJEKTOREN AUF UNTERRÄUME TRIGONOMETRISCHER POLYNOME

Dissertation

dem Fachbereich Mathematik
der
Eberhard-Karls-Universität
zu Tübingen

zur
Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

vorgelegt von

ROBERT SCHUMACHER
aus Stuttgart
1978

1979

MINIMALE PROJEKTOREN AUF UNTERRÄUME TRIGONOMETRISCHER POLYNOME

Dissertation

dem Fachbereich Mathematik
der
Eberhard-Karls-Universität
zu Tübingen

zur
Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

vorgelegt von

ROBERT SCHUMACHER
aus Stuttgart
1978

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Qualifikation: 12. 1. 1979

Dekan : Prof. Dr. W. Kaup

1. Berichterstatter : Prof. Dr. A. Schönhage

2. Berichterstatter : Prof. Dr. K. Zeller

Inhaltsverzeichnis

0.	Einleitung.	1
1.	Zur Minimaltät im Mittel.	5
2.	Projektoren minimaler Norm.	13
3.	Der Fall $G = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.	15
4.	Beispiele.	20
5.	Anhang.	26
	Literatur.	32

0. Einleitung

Aus der Fourieranalysis ist bekannt, daß die Normen der Fourierprojektoren $F_n: C_{2\pi} \to P_n$ vom Raum $C_{2\pi}$ der stetigen, 2π-periodischen, komplexwertigen Funktionen, versehen mit der Norm der gleichmäßigen Konvergenz

$$|f| := \sup_{x \in R} |f(x)| ,$$

auf den Raum P_n der trigonometrischen Polynome vom Grad $\leq n$, bezüglich n unbeschränkt sind. Nach Banach-Steinhaus erkennt man die Existenz einer stetigen Funktion, deren Fourier-Partialsummen eine unbeschränkte Folge bilden.

Die Norm von Operatoren gibt eine Abschätzung für deren Approximationsgüte

$$|f - F_n f| \leq (1+|F_n|) \operatorname{dist}(f, P_n)$$

(vgl. Cheney and Price [3]).

Lozinsky [8] zeigte, daß F_n unter allen Projektoren $C_{2\pi} \to P_n$ minimale Norm hat.

Neben der Norm betrachtet man präziser auch die Lebesguefunktion λ eines stetigen, linearen Projektors $\phi: C_{2\pi} \to P_n$

$$R \ni x \mapsto \lambda(x) := |\hat{x}\phi| ,$$

wobei $\hat{x}$ das Auswertungsfunktional an der Stelle x bedeute:

$$\hat{x}f := f(x).$$

Offensichtlich gilt dann

$$|\phi| = \sup_{x \in R} |\hat{x}\phi| .$$

Mit Hilfe der Marcinkiewicz-Bermanschen Gleichung

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T_x \phi T_{-x}\,dx = F_n$$

mit den Shiftoperatoren

$$(T_x f)(t) = f(t+x)$$

erkennt man leicht, daß

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\lambda\phi|\,dx \geq |F_n|$$

gelten muß, und wegen der Stetigkeit von λ tritt $|\phi| = |F_n|$ genau dann ein, falls für alle $x\varepsilon\mathbb{R}$

$$|\lambda\phi| = |F_n|$$

gilt.

In [9] haben wir eine Klasse von Projektoren, deren Lebesguefunktion im Mittel minimal ist, d. h. für die

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\lambda\phi|\,dx = |F_n|$$

gilt, bereits charakterisiert.
Es ergab sich dabei eine konvexe Menge, in der sogar Interpolationsoperatoren, und zwar genau die zu äquidistanten Stützstellen gehörigen, enthalten sind.

Bei dem Problem der Charakterisierung der Projektoren von minimaler Norm, das von Cheney u. a. [2] gelöst wurde, ergab sich dagegen die Eindeutigkeit des Fourierprojektors.

Diese Fragen lassen eine naheliegende Verallgemeinerung

zu, bei der sich jedoch, wie sich zeigen wird, andere Resultate ergeben werden.

Wir betrachten eine endliche oder unendliche, abelsche Gruppe G mit kompakter Topologie und normiertem Haarschem Maß m; C(G) sei die Menge der komplexwertigen, stetigen Funktionen auf G, und $\hat{G}$ die Menge aller endlichdimensionalen, irreduziblen, unitären Darstellungen von G. Alle Elemente von $\hat{G}$ sind eindimensional, also multiplikative Charaktere.

Anstatt der Menge aller trigonometrischen Polynome vom Grade $\leq n$ können wir den zu einer beliebigen, endlichen Teilmenge $K \subseteq \hat{G}$ gehörigen shiftinvarianten, linearen Unterraum $E_K := \langle K \rangle$, die lineare Hülle von K, zugrundelegen.

Der zugehörige Dirichletkern ist dann $D_K := \sum_{\gamma \in K} \gamma$.

Lambert [5,6] hat für diesen verallgemeinerten Fall bereits nachgewiesen, daß die Eindeutigkeit des Fourierprojektors nicht mehr generell gilt.

Er gab als Beispiel ein unendliches Produkt kompakter, abelscher Gruppen, welches zu einer unendlichdimensionalen Menge minimaler Projektoren führt. Später werden wir sehr einfache Beispiele für das Auftreten solcher Mehrdeutigkeiten angeben.

Das Hauptresultat aus [9] hängt wesentlich von einer speziellen Eigenschaft des klassischen Dirichletkernes

$$D_n(t) := \sum_{|k| \leq n} e^{ikt}$$

ab. Im klassischen Fall gilt für alle $p \in P_n$:

(sign $p(x)$ = sign $D_n(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow$ es gibt ein $c > 0$, so daß $p = cD_n$,

$$\text{mit sign } z := \begin{cases} \frac{z}{|z|} & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{für } z = 0 \quad . \end{cases}$$

Von besonderer Bedeutung für unsere verallgemeinerte Problemstellung ist nämlich der konvexe Kegel

$$\Delta_K := \left\{ g \in E_K \mid g(x) \cdot \overline{D_K(x)} \geq 0 \quad \text{für alle } x \in G \right\} .$$

Wir setzen $d := \dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{lin}_{\mathbb{C}} \Delta_K)$.

Im klassischen Fall gilt also $d = 1$.

Anstatt Projektoren legen wir unseren Untersuchungen allgemeiner die stetigen, linearen Operatoren zugrunde, für welche die Marcinkiewicz-Bermansche Gleichung gilt. In Kapitel 1 charakterisieren wir diejenigen Operatoren davon, deren Lebesguefunktion im Mittel minimal ist, und dehnen damit unser früheres Resultat aus [9] auf beliebige kompakte, abelsche Gruppen und verallgemeinerte trigonometrische Polynome aus.

Die Operatoren minimaler Norm werden dann in Kapitel 2 durch eine Eigenschaft ihres zugehörigen Dirichletkernes charakterisiert.

In Kapitel 3 werden die erhaltenen Resultate auf den Fall $G = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ angewendet und Eindeutigkeitsfragen diskutiert, während in Kapitel 4 gezeigt wird, daß man bereits bei geringfügigen Modifikationen des klassischen Falles eventuell wesentlich andere Resultate erhält.

In einem Anhang betrachten wir einige Graphen zu den behandelten Beispielen und zeigen noch weitere interessante Fälle auf.

Herrn Prof.Dr.A.Schönhage möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für wertvolle Ratschläge herzlich danken.

1. Zur Minimalität im Mittel

Den Raum der stetigen, linearen Operatoren $C(G) \to E_K$ bezeichnen wir mit $L(C(G), E_K)$. Der Dual von $C(G)$ ist isomorph zum Raum $M(G)$ aller Radon-Maße auf G.
Wir schreiben

$$\mu(f) = \int_G f(t)\,d\mu(t) \qquad \text{für } \mu \in M(G),\ f \in C(G)$$

und $$(g\mu)(f) = \int_G f(t)g(t)\,d\mu(t) \quad \text{für } \mu \in M(G),\ f, g \in C(G).$$

Es ist wohlbekannt, daß sich das Tensorprodukt $M(G) \otimes E_K$ in $L(C(G), E_K)$ einbetten läßt vermöge

$$(h(\mu \otimes P))(f) = \mu(f) \cdot P \quad \text{für } \mu \in M(G),\ P \in E_K,\ f \in C(G).$$

Diese Abbildung h ist sogar bijektiv, da E_K endlich-dimensional ist.

Unterwerfen wir $M(G) \otimes E_K$ zuerst dem durch

$$\tau(\mu \otimes \gamma) = (\overline{\gamma}\mu) \otimes \gamma \quad \text{für alle } \mu \in M(G),\ \gamma \in K,$$

bestimmten Isomorphismus τ, so erhalten wir

$$\left[(h \circ \tau)(\mu \otimes \gamma)\right](f) = \int_G f(t)\overline{\gamma(t)}\,d\mu(t) \cdot \gamma$$

oder

$$\left\{\left[(h \circ \tau)(\mu \otimes P)\right](f)\right\}(x) = \int_G f(t)P(x-t)\,d\mu(t)$$
$$\text{für alle } f \in C(G),\ \mu \in M(G),\ P \in E_K.$$

Wir identifizieren im Weiteren $\mu \otimes P$ mit dem Operator $(h \circ \tau)(\mu \otimes P)$.

Wir beschränken unsere Untersuchungen auf Operatoren der Form

$$\phi = F_K + \phi^*,$$

wobei $F_K : C(G) \to E_K$ den Fourierprojektor bezeichne und

$$\phi^* \in M_o(G) \otimes E_K$$

mit $M_o(G) := \{\mu \in M(G) \mid \mu(G) = 0\}$ sei.

Hiermit werden insbesondere sämtliche linearen Projektoren auf E_K erfaßt, denn ϕ ist genau dann ein Projektor auf E_K, falls für

$$\tilde{\phi} := \phi - F_K$$

und für jedes $\gamma^* \in K$

$$\tilde{\phi}\gamma^* = 0$$

ist. $\tilde{\phi}$ hat eine Darstellung

$$\tilde{\phi} = \sum_{\gamma \in K} \mu_\gamma \otimes \gamma \quad \text{für geeignete } \mu_\gamma \in M(G).$$

Für jedes $\gamma^* \in K$ gilt dann:

$$\tilde{\phi}\gamma^* = 0 \Rightarrow \sum_{\gamma \in K} \left(\int_G \gamma^*(t)\overline{\gamma(t)}\, d\mu_\gamma(t) \right) \cdot \gamma = 0$$

$$\Rightarrow \int_G \gamma^*(t)\overline{\gamma(t)}\, d\mu_\gamma(t) = 0 \quad \text{für jedes } \gamma \in K.$$

$\gamma = \gamma^*$ liefert

$$\int_G d\mu_{\gamma^*}(t) = \mu_{\gamma^*}(G) = 0,$$

falls $\phi = F_K + \tilde{\phi}$ linearer Projektor auf E_K. □

Durch

$$(\overline{\phi}f)(x) = \sum_{\gamma \in \overline{K}} \int_G f(t)\gamma(x-t)d\mu_\gamma(t) \text{ für } f \in L^\infty(G), x \in G \qquad (1.1)$$

wird eine normtreue, lineare Fortsetzung

$$\overline{\phi} : L^\infty(G) \to E_K$$

von

$$\phi = \sum_{\gamma \in \overline{K}} \mu_\gamma \otimes \gamma$$

definiert.

Für jedes $x \in G$ gilt dann

$$|\hat{x}\overline{\phi}| = |\hat{x}\phi|. \qquad (1.2)$$

Für Operatoren $\phi \in F_K + (M_o(G) \otimes E_K)$ gilt die Marcinkiewicz-Bermansche Gleichung (vgl. [4])

$$\int_G T_x \phi T_{-x} f \, dm(x) = F_K f \quad \text{für alle } f \in C(G). \qquad (1.3)$$

Aus L^1-Stetigkeitsgründen gilt (1.3) auch für alle $f \in L^\infty(G)$.

Gleichbedeutend mit (1.3) ist

$$\int_G T_x \phi^* T_{-x} dm(x) = 0 , \qquad (1.4)$$

da $\phi = F_K + \phi^*$.

Aus Stetigkeits- und Linearitätsgründen genügt es, für jedes $\gamma \in \hat{G}$ und $\phi^* \in M_o(G) \otimes E_K$

$$\int_G T_x \phi^* T_{-x} \gamma dm(x) = 0 \qquad (1.5)$$

nachzuweisen, da $\hat{G}$ ein vollständiges System in $C(G)$ bildet.

Dazu sei wie oben

$$\varphi^* = \sum_{\gamma \in K} \mu_\gamma \otimes \gamma \ .$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\int_G (T_x \varphi^* T_{-x}\gamma)(t)\,dm(x) &= \sum_{\gamma' \in K} \iint_{GG} \gamma(u-x)\gamma'(t+x-u)\,d\mu_{\gamma'}(u)\,dm(x) \\ &= \sum_{\gamma' \in K} \int_G \gamma(u)\gamma'(t-u)\,d\mu_{\gamma'}(u) \int_G \overline{\gamma(x)}\gamma'(x)\,dm(x) \\ &= \gamma(t) \cdot \int_G d\mu_\gamma(u) \ .\end{aligned}$$

Wegen $\gamma(t) \neq 0$ ist $\mu_\gamma(G) = 0$ für $\gamma \in K$ äquivalent zu (1.5). □

Wir setzen

$$D_K(t) := \sum_{\gamma \in K} \gamma(t)$$

und

$$\sigma(t) := \operatorname{sign} D_K(t) \ .$$

Wie für jeden Operator vom Faltungstyp

$$m \otimes P \qquad (P \in E_K)$$

gilt für

$$F_K = m \otimes D_K$$

und alle $x \in G$:

$$|\hat{x} F_K| = |F_K| \ . \tag{1.6}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}|\hat{x} \overline{F}_K| &= \int_G |D_K(x-t)|\,dm(t) \\ &= \int_G \overline{\sigma(x-t)} D_K(x-t)\,dm(t) \\ &= \int_G \sigma(t-x) D_K(x-t)\,dm(t)\end{aligned}$$

$$|\mathfrak{k}\overline{F}_K| = (\overline{F}_K T_{-x}\sigma)(x),$$

$$|\mathfrak{k}F_K| = (T_x \overline{F}_K T_{-x}\sigma)(0) . \qquad (1.7)$$

Aufgrund von (1.3) haben wir für $\phi \in F_K + (M_o(G) \otimes E_K)$:

$$\int_G (T_x \overline{\phi} T_{-x}\sigma)(0)\, dm(x) = (\overline{F}_K\sigma)(0) = |\overline{F}_K| , \qquad (1.8)$$

und damit

$$\int_G |\mathfrak{k}\overline{\phi}|\, dm(x) \geq |\overline{F}_K| , \qquad (1.9)$$

insbesondere also

$$|\phi| \geq |F_K| . \qquad (1.10)$$

Nun geben wir eine Charakterisierung derjenigen Operatoren $\phi \in F_K + (M_o(G) \otimes E_K)$, deren Lebesguefunktion $\lambda(x) := |\mathfrak{k}\phi|$ im Mittel minimal ist. Damit dehnen wir unser früheres Resultat aus [9] auf abelsche Gruppen und shiftinvariante Unterräume verallgemeinerter trigonometrischer Polynome aus.

Satz 1: Für einen Operator $\phi \in F_K + (M_o(G) \otimes E_K)$ gilt

$$\int_G |\mathfrak{k}\phi|\, dm(x) = |F_K| \qquad (1.11)$$

genau dann, wenn es ein positives Borelmaß $\mu \in M(G)$ und eine Familie $(K_t \in \Delta_K \mid t \in G)$ gibt, so daß die Funktion $(t,x) \mapsto K_t(x)$ zweidimensional Borel-meßbar ist und

$$\phi f = \int_G f(t) T_{-t} K_t\, d\mu(t) \quad \text{für alle } f \in C(G) \qquad (1.12)$$

gilt.

Beweis:

Da E_K nur stetige Funktionen enthält und deshalb die Lebesguefunktion stetig ist, ergibt sich aus (1.8) (nach Fortsetzung von ϕ zu $\bar{\phi}$) die Äquivalenz von(1.11) und

$$(T_x\bar{\phi}T_{-x}\sigma)(0) = |\hat{x}\bar{\phi}| \quad \text{für m-fast alle } x\in G. \qquad (1.13)$$

Wir können also in unserer Behauptung die Bedingung (1.11) durch (1.13) ersetzen.

Aus (1.12) ergibt sich (ebenfalls nach Fortsetzung zu $\bar{\phi}$)

$$\begin{aligned}(T_x\bar{\phi}T_{-x}\sigma)(0) &= \int_G \overline{\sigma(x-t)}K_t(x-t)d\mu(t)\\ &= \int_G |K_t(x-t)|\, d\mu(t)\\ &= |\hat{x}\bar{\phi}|.\end{aligned}$$

Nun zur Umkehrung:

Wenn $\phi = \sum_{\gamma\in K} \mu_\gamma \otimes \gamma$, so gibt es zu jedem $\gamma\in K$ nach dem Satz von Radon-Nikodym eine Dichtefunktion d_γ von μ_γ bezüglich

$$\mu := \sum_{\gamma\in K} |\mu_\gamma|,$$

so daß mit

$$K_t := \sum_{\gamma\in K} d_\gamma(t)\cdot\gamma$$

gilt:

$$\begin{aligned}(\phi f)(x) &= \sum_{\gamma\in K}\int_G f(t)\gamma(x-t)d\mu_\gamma(t)\\ &= \int_G f(t)\sum_{\gamma\in K}\gamma(x-t)d_\gamma(t)d\mu(t)\\ &= \int_G f(t)(T_{-t}K_t)(x)d\mu(t)\end{aligned}$$

und

$$(T_x\overline{\sigma}T_{-x}\sigma)(0) = \int_G \overline{\sigma(x-t)}K_t(x-t)d\mu(t) \ .$$

Wegen

$$|\hat{\sigma}| = \int_G |K_t(x-t)|\, d\mu(t)$$

ergibt sich aus (1.13):

$$\int_G \overline{\sigma(x-t)}K_t(x-t)d\mu(t) = \int_G |K_t(x-t)|\, d\mu(t) \text{ für m-fast alle } x\in G$$

oder

$$\int_G \mathrm{Re}(\overline{\sigma(x-t)}K_t(x-t))d\mu(t) = \int_G |K_t(x-t)|\, d\mu(t) \text{ für m-fast alle } x\in G. \quad (1.14)$$

Sei

$$\mathfrak{A} := \{(x,t)\in G^2 \mid \mathrm{Re}(\overline{\sigma(x-t)}K_t(x-t)) < |K_t(x-t)|\},$$

$$\mathfrak{A}^t := \{x\in G \mid (x,t)\in \mathfrak{A}\},$$

$$\mathfrak{A}_x := \{t\in G \mid (x,t)\in \mathfrak{A}\}.$$

Dann gilt wegen (1.14):

$$\mu(\mathfrak{A}_x) = 0 \quad \text{für m-fast alle } x\in G. \quad (1.15)$$

Die Menge

$$\mathfrak{M} := \{t\in G \mid m(\mathfrak{A}^t) > 0\}$$

ist Borel-meßbar.

Sei $\chi_{\mathfrak{A}}(x,t) := \begin{cases} 1 & \text{falls } (x,t)\in \mathfrak{A} \\ 0 & \text{falls } (x,t)\notin \mathfrak{A}, \end{cases}$

dann gilt nach (1.15):

$$\int_G \mu(\mathfrak{A}_x)dm(x) = 0$$

Nach Fubini gilt:

$$\int_G \int_G \chi_\alpha(x,t)\,d\mu(t)\,dm(x) = \int_G \int_G \chi_\alpha(x,t)\,dm(x)\,d\mu(t),$$

also

$$0 = \int_G \mu(\alpha_x)\,dm(x) = \int_G m(\alpha^t)\,d\mu(t)$$

$$= \int_{\mathfrak{M}} m(\alpha^t)\,d\mu(t),$$

und damit

$$\mu(\mathfrak{M}) = 0. \tag{1.16}$$

Für alle $t \in \mathfrak{M}$ und $x \in G$ läßt sich $K_t(x)$ durch 0 ersetzen, ohne ϕ zu verändern.

Für jedes $t \in G \setminus \mathfrak{M}$ gilt

$$m(\alpha^t) = 0,$$

also

$$K_t(x) \cdot \overline{D_K(x)} \geq 0 \text{ für m-fast alle } x \in G. \tag{1.17}$$

Da $K_t \in E_K$ stetig, und somit auch $K_t \cdot D_K$ stetig ist, gilt (1.17) für alle $x \in G$, und damit

$$K_t \in \Delta_K \quad \text{für alle } t \in G \setminus \mathfrak{M}, \tag{1.18}$$

wegen (1.16) kann (1.18) für alle $t \in G$ erfüllt werden, ohne die Meßbarkeit von $t \mapsto T_{-t}K_t$ zu verletzen, und damit ist Satz 1 bewiesen.

□

2. Projektoren minimaler Norm

Im folgenden betrachten wir Operatoren $\phi \in F_K \leftarrow (M_o(G) \otimes E_K)$. Nach (1.9) gilt deshalb:

$$|F_K| \leq \int_G |\check{x}\phi| \, dm(x) \leq |\phi| . \tag{2.1}$$

Unter obiger Konkurrenz wollen wir jetzt die Operatoren minimaler Norm bestimmen, also diejenigen, für die

$$|\phi| = |F_K|$$

gilt.

Dies impliziert nach (2.1):

$$\int_G |\check{x}\phi| \, dm(x) = |F_K| .$$

Wir brauchen also nur in der Menge

$$M := \left\{ \phi \in F_K + (M_o(G) \otimes E_K) \;\middle|\; \int_G |\check{x}\phi| dm(x) = |F_K| \right\}$$

zu suchen.

Nach (1.13) gilt

$$\phi \in M \iff (\bar{\phi} T_{-x} \sigma)(x) = |\check{x}\bar{\phi}| \quad \text{für m-fast alle } x \in G, \tag{2.2}$$

und aus (2.1) entnimmt man wegen der Stetigkeit der Lebesguefunktion:

$$|\phi| = |F_K| \iff |\check{x}\phi| = |F_K| \quad \text{für alle } x \in G. \tag{2.3}$$

Wegen Satz 1 hat jeder Operator $\phi \in M$ eine Darstellung der Form

$$(\phi f)(x) = \int_G f(t) K_t(x-t) d\mu(t) \quad \text{für alle } f \in C(G)$$

mit einem positiven Borel-Maß μ und einer Familie $(K_t \varepsilon \Delta_K \mid t \varepsilon G)$.

Somit gilt

$$|\hat{x}\phi| = \int_G |K_t(x-t)| \, d\mu(t).$$

Insgesamt erhalten wir also folgenden

Satz 2: Für einen Operator $\phi \varepsilon F_K + (M_o(G) \otimes E_K)$ gilt genau dann

$$|\phi| = |F_K|,$$

falls ϕ eine Darstellung der Form

$$(\phi f)(x) = \int_G f(t) K_t(x-t) d\mu(t) \quad \text{für alle } f \varepsilon C(G)$$

hat mit einem positiven Borel-Maß μ und einer Familie $(K_t \varepsilon \Delta_K \mid t \varepsilon G)$, so daß die Funktion $(t,x) \to K_t(x)$ zweidimensional Borel-meßbar ist, und

$$\int_G |K_t(x-t)| \, d\mu(t) = |F_K| \quad \text{für alle } x \varepsilon G$$

gilt.

3. Der Fall $G = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

Wir untersuchen jetzt den Fall $G = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ speziell mit solchen K, bei denen der zugehörige Dirichletkern reell ist.
$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ besitzt die Charaktere $\{e_k \mid k\in\mathbb{Z},\ e_k(t) := e^{ikt}\}$.

Unter Berücksichtigung der linearen Unabhängigkeit der Funktionen $\{\text{Im } e_k = -\text{Im } (e_{-k}) \mid k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\}$ erkennt man leicht, daß $D_K := \sum_{k\in K} e_k$ genau für symmetrisches $K\subseteq\mathbb{Z}$ reell ist, also

D_K reell $\Leftrightarrow$ für jedes $k\in\mathbb{Z}$ gilt $(k\in K \Rightarrow -k\in K)$.

Außerdem ist D_K für symmetrisches K eine gerade Funktion, also

$$D_K(t) = D_K(-t), \tag{3.1}$$

und insbesondere ist die Menge der Nullstellen von D_K symmetrisch zu 0.

Wir setzen einschränkend voraus, D_K habe nur einfache Nullstellen, und ordnen diese paarweise:

$(t_1,-t_1),\ldots,(t_p,-t_p)$ mit $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_p < \pi$,
(0 und π können nicht als einfache Nullstellen auftreten).

Nun suchen wir Funktionen $g\in E_K$, so daß

$$D_K + g \in \Delta_K; \tag{3.2}$$

solche g sind dann ebenfalls reell.

Also läßt sich g darstellen als

$$g = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\geq 0}} (\alpha_k e_k + \bar{\alpha}_k e_{-k}) \text{ mit geeigneten } \alpha_k = x_k + iy_k,\ x_k, y_k \in \mathbb{R}$$

$$= 2 \sum_{k\geq 0} \mathrm{Re}(\alpha_k e_k),$$

$$g(t) = 2 \sum_{k\geq 0} (x_k \cos(kt) - y_k \sin(kt)). \qquad (3.3)$$

Wegen (3.2) muß dazu noch

$$g(t_\nu) = g(-t_\nu) = 0 \quad \text{für } \nu = 1, \ldots, p$$

erfüllt sein.

Zerlegen wir g in seinen geraden Anteil g_o und seinen ungeraden Anteil g_1, also

$$g = g_o + g_1,$$

dann ergibt sich

$$g_o(t) = 2 \sum_{k\geq 0} x_k \cos(kt),$$

$$g_1(t) = -2 \sum_{k>0} y_k \sin(kt),$$

und für $\nu = 1, \ldots, p$:

$$g_o(t_\nu) = g_1(t_\nu) = 0,$$

also genügen die Koeffizienten x_k $(0 \leq k \in K)$ bzw. y_k $(0 < k \in K)$ den Gleichungssystemen

$$\sum_{k\geq 0} x_k \cos(kt_\nu) = 0 \qquad (1 \leq \nu \leq p), \qquad (3.4a)$$

$$\sum_{k>0} y_k \sin(kt_\nu) = 0 \qquad (1 \leq \nu \leq p), \qquad (3.4b)$$

mit je p vielen Gleichungen für $\left\lceil \frac{\#K}{2} \right\rceil$ viele x_k bzw. $\left\lfloor \frac{\#K}{2} \right\rfloor$ viele y_k.

Insgesamt haben wir damit also 2p Bedingungen für $\left\lceil \frac{\#K}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{\#K}{2} \right\rfloor = \#K$ viele Unbekannte.

Da die t_ν gerade die Nullstellen von D_K sind, ergibt

$$x_o = 1,$$
$$x_k = 2 \quad (0<k\varepsilon K),$$
$$y_k = 0 \quad (0<k\varepsilon K)$$

eine triviale Lösung von (3.4).

Weitere davon linear unabhängige Lösungen existieren sicher, falls

$$2p < \#K-1.$$

Seien nun $A_1 := D_K$, $A_2, \ldots, A_l$ die zu einer Lösungsbasis von (3.4a) gehörigen geraden Funktionen, und entsprechend $A_{l+1}, \ldots, A_d$ die zu einer Lösungsbasis von (3.4b) gehörigen ungeraden Funktionen; die Funktionen $A_1, \ldots, A_d$ bilden dann eine Basis von $\operatorname{lin} \Delta_K$, also $d = \dim(\operatorname{lin} \Delta_K)$ wie oben.

Wir setzen

$$\varepsilon_i^* := \max \left\{ \varepsilon \;\middle|\; \varepsilon |A_i(t)| \leq \frac{1}{d} |D_K(t)| \text{ für alle } t\varepsilon G \right\}$$

Es ist $\varepsilon_i^* > 0$, da die Nullstellen von D_K als einfach vorausgesetzt wurden.

Wir betrachten folgende Operatoren:

Für $s\varepsilon N$ und reelle ε_i mit $|\varepsilon_i| < \varepsilon_i^*$ $(1 \leq i \leq d)$ sei

$$P_s := F_K + \mu_s \circledast \sum_{i=1}^{d} \varepsilon_i A_i$$

mit

$$\mu_s := c_s m \qquad (c_s(t) := \cos(st));$$

dann gilt für jedes $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ nach Satz 1

$$P_s \in M.$$

Außerdem ist für alle $x \in G$:

$$\begin{aligned}
|\hat{P}_s| &= (\overline{P}_s T_{-x} \sigma)(x) \\
&= |\hat{F}_K| + \sum_{i=1}^{d} \varepsilon_i \int_G \overline{\sigma(x-t)} A_i(x-t) \cos(st)\, dm(t) \\
&= |\hat{F}_K| + \sum_{i=1}^{d} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \varepsilon_i \alpha_{i,j} \int_G \overline{e_j(t)} \cos(st)\, dm(t)\, e_j(x), \\
&\quad \text{wobei } \alpha_{i,j} := \int_G \overline{e_j(t)} |A_i(t)|\, dm(t), \\
|\hat{P}_s| &= |\hat{F}_K| + \tfrac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{d} \varepsilon_i \alpha_{i,s}\Big) e_s(x) + \tfrac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{d} \varepsilon_i \alpha_{i,-s}\Big) e_{-s}(x),
\end{aligned}$$

also

$$|\hat{P}_s| = |\hat{F}_K| \text{ für alle } x \in G \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{d} \varepsilon_i \alpha_{i,s} = 0 \\ \text{und} \\ \sum_{i=1}^{d} \varepsilon_i \alpha_{i,-s} = 0 \end{cases} \tag{3.}$$

Für $1 \le i \le l$ ist $\mathrm{abs}(A_i)$ gerade, also $\alpha_{i,s} = \alpha_{i,-s}$,

für $l+1 \le i \le d$ dagegen ist $\mathrm{abs}(A_i)$ ungerade, also $\alpha_{i,s} = -\alpha_{i,-s}$;

somit ist die rechte Seite von (3.5) äquivalent zu

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{l} \varepsilon_i \alpha_{i,s} = 0, \\ \sum_{i=l+1}^{d} \varepsilon_i \alpha_{i,s} = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Falls $l > 1$ gilt, lassen sich immer $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d) \neq (0, \ldots, 0)$ als Lösungen von (3.6) finden.

Die konvexe Hülle solcher minimaler Operatoren $\{P_s \mid s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ besteht ebenfalls aus minimalen Operatoren.

Darüberhinaus lassen sich dann noch weitere minimale Operatoren finden durch andere Wahl von μ_s, beispielsweise $\mu_s = (\mathrm{Im}\, e_s)m$.

Jedenfalls haben wir damit im Falle $l>1$ eine unendlichdimensionale, konvexe Menge minimaler Operatoren gefunden.

Für $s>2\cdot\max\{|k| \mid k\in K\}$ sind die so konstruierten P_s sogar Projektoren auf E_K; für jedes $k\in K$ gilt nämlich:

$$((\mu_s \otimes \sum_{i=1}^{d} \varepsilon_i A_i)e_k)(x) = \sum_{i=1}^{d} \int_G \varepsilon_i e_k(t) A_i(x-t)\cos(st)\,dm(t) = 0.$$

Die Menge der minimalen Projektoren ist also ebenfalls unendlichdimensional.

Aber auch im Falle $l=d=1$ kann es sein, daß außer F_K weitere minimale Projektoren vorkommen, wie schon Lambert gezeigt hat (vgl. Einleitung).

Gilt nämlich für $A_1 = D_K$ und ein $s \notin \{k_1 - k_2 \mid k_1, k_2 \in K\}$

$$\alpha_{1,s} = 0,$$

so ist die Bedingung (3.6) auch für $\varepsilon_1 \neq 0$ trivialerweise erfüllt.

Als einfachstes Beispiel hierfür betrachten wir ein

$$K \subsetneq 2\mathbb{Z}.$$

Mit D_K ist dann auch $\mathrm{abs}(D_K)$ eine π-periodische Funktion. Also gilt

$$\alpha_{1,s} = 0 \text{ für alle ungeraden } s\in\mathbb{Z}.$$

4. Beispiele

Im klassischen Fall $E_K = P_n$ der trigonometrischen Polynome vom Grade $\leq n$ hat (3.4a) nur einen eindimensionalen Lösungsraum und (3.4b) nur die triviale Lösung, da P_n ein Haarsches System bildet und D_n 2n verschiedene einfache Nullstellen besitzt. Außerdem gilt für die Fourierkoeffizienten von $abs(D_n)$:

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikt} |D_n(t)| \, dt \neq 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}$$

(vgl. [7] , [9]).

Hieraus ergibt sich die Eindeutigkeit des Fourierprojektors (siehe [2] , [5] , [9]).

Wir betrachten jetzt neben $K_n := \{ k \in \mathbb{Z} \mid |k| \leq n \}$ noch $K_n^* := K_n \setminus \{-1, 1\}$ und vergleichen beide Fälle miteinander.

Es gilt

$$\dim (E_{K_n}) = 2n+1,$$

bzw.

$$\dim (E_{K_n^*}) = 2n-1.$$

Der klassische Dirichletkern $D_n := D_{K_n}$ besitzt die einfache Darstellung

$$D_n(t) = \frac{\sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right)}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)} ;$$

somit gilt

$$D_n^*(t) := D_{K_n^*}(t) = D_n(t) - 2\cos(t) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2} t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - 2\cos(t). \quad (4.1)$$

Im folgenden wollen wir die Anzahl der Nullstellen von D_n^* nach oben abschätzen durch Vergleich von D_n^* mit D_n. Da sowohl D_n^* als auch D_n gerade Funktionen sind, können wir die Überlegungen aus Kapitel 3 anwenden.
Es wird gezeigt, daß D_n^* für $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1,2,3,5\}$ so wenig Nullstellen hat, daß nach Kapitel 3 die Existenz einer unendlichdimensionalen Menge minimaler Projektoren folgt.

Die Substitution $u = \cos t$ überführt D_n bzw. D_n^* in reelle Polynome vom Grade n:

$$d_n(u) := D_n(t),$$

$$d_n^*(u) := D_n^*(t).$$

Für $a<b$ mit $d_n(a)\neq 0\neq d_n(b)$ und $d_n^*(a)\neq 0\neq d_n^*(b)$ sei $N_n(a,b)$ (bzw. $N_n^*(a,b)$) die Anzahl der Nullstellen von d_n (bzw. d_n^*) in (a,b), entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt.

$W_n(a)$ (bzw. $W_n^*(a)$) bezeichne die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Sequenz

$$(d_n(a), d_n'(a), \ldots, d_n^{(n)}(a)),$$

$$\text{bzw. } (d_n(a), d_n'(a), \ldots, d_n^{(n)}(a)),$$

wobei Nullen gestrichen seien.

Da d_n nur reelle Nullstellen besitzt, gilt nach einem klassischen Resultat für $a<b$ mit $d(a)\neq 0\neq d(b)$:

$$N_n(a,b) = W_n(a) - W_n(b), \tag{4.2}$$

und da alle Nullstellen von d_n in (-1,1) liegen:

$$n = N_n(-1,1) = W_n(-1) - W_n(1), \tag{4,3}$$

also

$$W_n(-1) = n,$$

und

$$W_n(1) = 0.$$

Da $D_n(t_k) = 0$ für $t_k = k\frac{2\pi}{2n+1}$ und $0 < |k| \leq n$, und somit

$$d_n(x_k) = 0 \quad \text{für } x_k := \cos(k\tfrac{2\pi}{2n+1}) \text{ und } 0 < k \leq n,$$

haben wir

$$N_n(\cos\theta, 1) = \left\lfloor \theta \tfrac{2n+1}{2\pi} \right\rfloor \text{ für } 0 < \theta < \pi \text{ und } D_n(\theta) \neq 0;$$

mit

$$N_n(\cos\theta, 1) = W_n(\cos\theta) - W_n(1) = W_n(\cos\theta)$$

also

$$W_n(\cos\theta) = \left\lfloor \theta \tfrac{2n+1}{2\pi} \right\rfloor. \tag{4.4}$$

Wegen

$$|D_n(t)| \leq \frac{1}{\sin(\frac{t}{2})} \qquad \text{für alle } t\varepsilon(o,\pi)$$

und

$$\frac{1}{\sin(\frac{t}{2})} < -2\cos t \qquad \text{für } t\varepsilon\left[0.7\pi, \pi\right]$$

gilt

$$D_n^*(t) = D_n(t) - 2\cos t \neq 0 \quad \text{für } t\varepsilon\left[0.7\pi, \pi\right],$$

bzw.

$$d_n^*(x) \neq 0 \qquad \text{für } x\varepsilon\left[-1, \cos(0.7\pi)\right).$$

Für $-1 < x \leq \cos(0.7\pi)$ und $d_n^*(x) \neq 0$ ist daher

$$N_n^*(-1,1) = N_n^*(-1,x) + N_n^*(x,1)$$

$$= N_n^*(x,1),$$

und

$$N_n^*(x,1) \leq W_n^*(x) - W_n^*(1) \leq W_n^*(x).$$

Insgesamt gilt somit

$$N_n^*(-1,1) \leq W_n^*(x) \quad \text{für } -1<x\leq\cos(0.7\pi). \tag{4.5}$$

Nun haben wir noch $W_n^*(x)$ abzuschätzen.
Zunächst vergleichen wir $W_n^*(x)$ mit $W_n(x)$.
Es gilt

$$d_n^*(x) = d_n(x) - 2x,$$

$$d_n^{*\prime}(x) = d_n'(x) - 2,$$

$$d_n^{*(\nu)}(x) = d_n^{(\nu)}(x) \quad \text{für } 2\leq\nu\leq n.$$

Somit haben wir für beliebiges n:

$$W_n(x) - 2 \leq W_n^*(x) \leq W_n(x) + 2.$$

Wegen (4.4) ist

$$W_n(\cos(0.7\pi)) = \lfloor 0.7n + 0.35 \rfloor.$$

Für $n\geq 12$ gilt

$$\lfloor 0.7n + 0.35 \rfloor + 2 \leq n - 2,$$

also

$$W_n^*(x) \leq n - 2,$$

und wegen (4.5):

$$N_n^*(-1,1) \leq n - 2.$$

Damit hat D_n^* für $n \geq 12$ höchstens $2n-4$ verschiedene Nullstellen, während $\#K_n^* = 2n-1$, also gilt nach Kapitel 3 zumindest

$$\dim(\operatorname{lin} \Delta_{K_n^*}) > 1,$$

oder genauer:

$$\begin{aligned} p := N_n^*(-1,1) &\leq W_n^*(\cos 0{,}7\pi) \\ &\leq W_n(\cos 0.7\pi)+2 \\ &\leq 0.7n+2.35, \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \dim(\operatorname{lin} \Delta_{K_n^*}) &\geq \#K_n - 2p \\ &\geq 0.6n - 5.7. \end{aligned}$$

Da $N_n^*(-1,1)$ die Nullstellen von d_n^* entsprechend ihrer Vielfachheit zählt, bleiben diese Abschätzungen auch gültig, falls mehrfache Nullstellen auftreten .

Auch für $n=4$ und $6 \leq n \leq 11$ kann durch eine genauere Abschätzung von $W_n^*(x)$ das Fehlen voller Nullstellenzahl nachgewiesen werden.

Wir behandeln z. B. den Fall $n=4$:

$$W_4(\cos(0.7\pi)) = \lfloor 0.7 \cdot 4 + 0.35 \rfloor = 3;$$

wegen

$$-0.6 < \cos(0.7\pi) = -0.587785...$$

gilt

$$N_4^*(-1,1) \leq W_4^*(-0.6).$$

Es ist

$$d_4(x) = 16x^4+8x^3-12x^2-4x+1,$$

$$d_4'(x) = 64x^3+24x^2-24x-4,$$

also

$$d_4(-0.6) = -0.5744 < 0; \quad d_4^*(-0.6) = 0.6256 > 0;$$

$$d_4'(-0.6) = 5.216 > 0; \quad d_4^{*\prime}(-0.6) = 3.216 > 0;$$

und daraus folgt

$$W_4^*(-0.6) = W_4(-0.6) - 1 = 3 - 1 = 2.$$

Somit hat D_4 nur 2 verschiedene Nullstellenpaare, und deshalb

$$\dim(\operatorname{lin}\Delta_{K_4^*}) \geq 3.$$

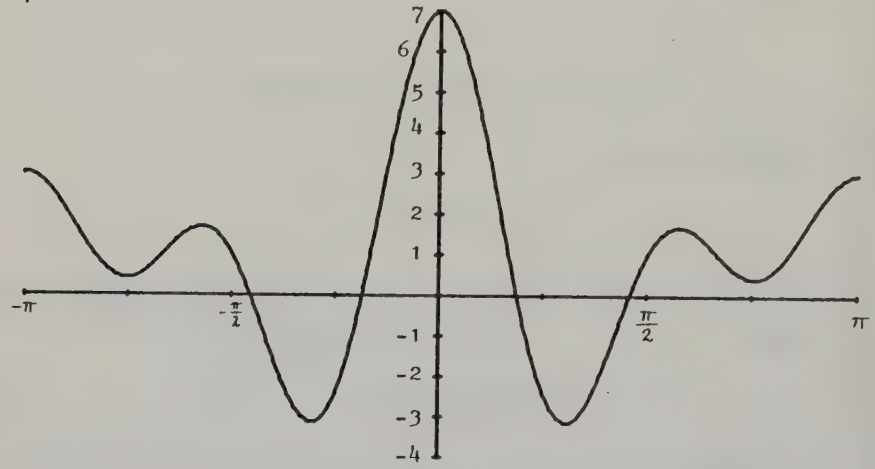
Für $s>8$ sind dann beispielsweise

$$P_s = F_{K_4^*} + \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{s,i}(c_s m) \otimes A_i$$

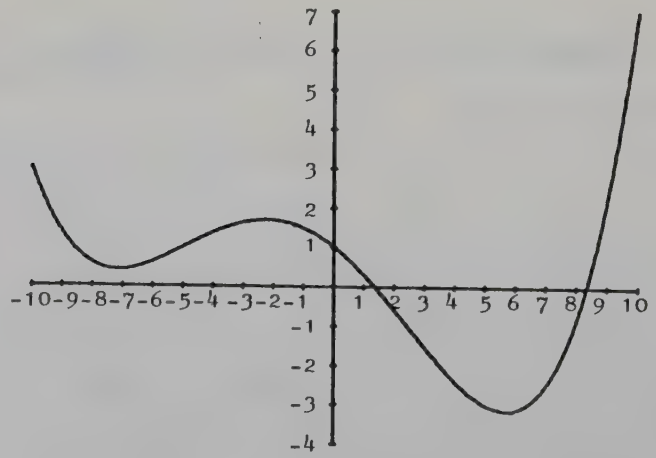
mit geeigneten $(\varepsilon_{s,1},\varepsilon_{s,2},\varepsilon_{s,3})$ und $A_i \varepsilon \Delta_{K_4^*}$ minimale, lineare Projektoren.

5. Anhang

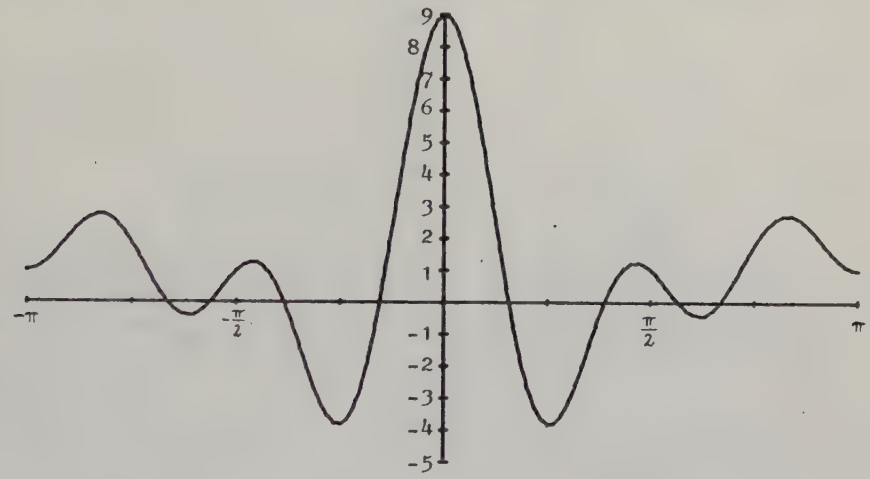
In diesem Anhang wollen wir die Graphen einiger Dirichletkerne betrachten und an weiteren Fällen die Eindeutigkeit des Fourierprojektors diskutieren.
Zunächst zu den in Kapitel 4 behandelten Beispielen:
$D_4^*(t) = 2\cos(4t)+2\cos(3t)+2\cos(2t)+1$



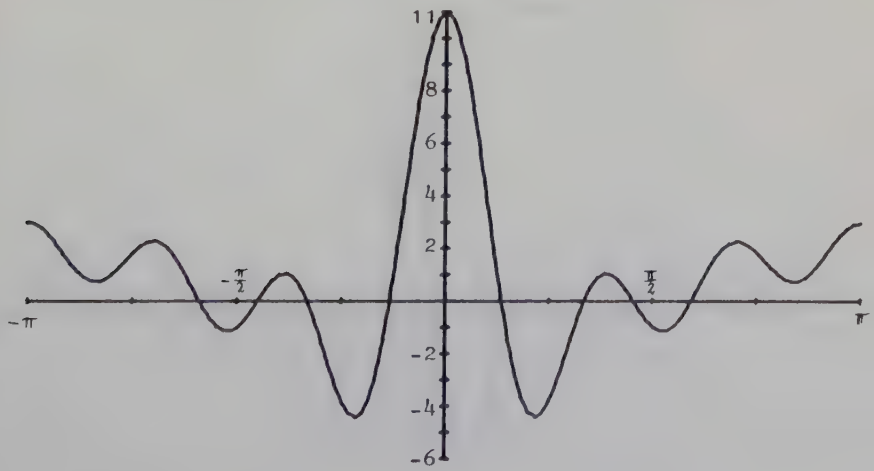
Das zugehörige algebraische Polynom ist dann
$d_4^*(x) = 16x^4+8x^3-12x^2-6x+1$.



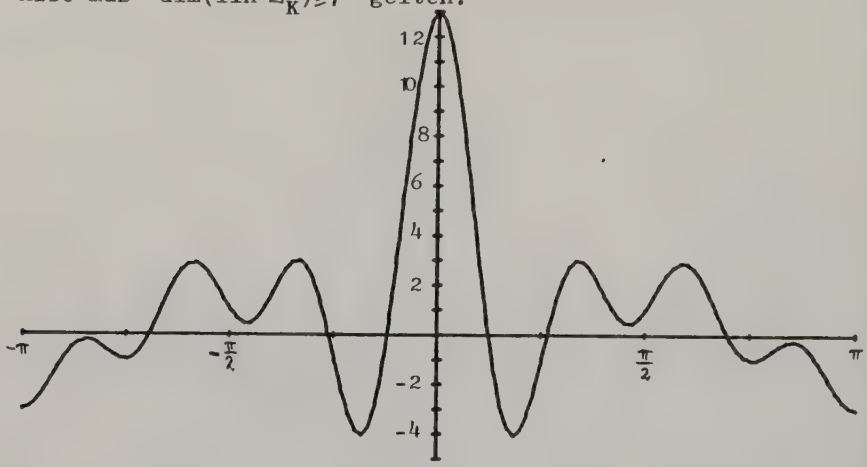
$D_5^*(t) = 2\cos(5t)+2\cos(4t)+2\cos(3t)+2\cos(2t)+1$
dagegen hat 8 Nullstellen, und wir können deshalb nicht auf eine Verletztheit der Eindeutigkeit schließen.



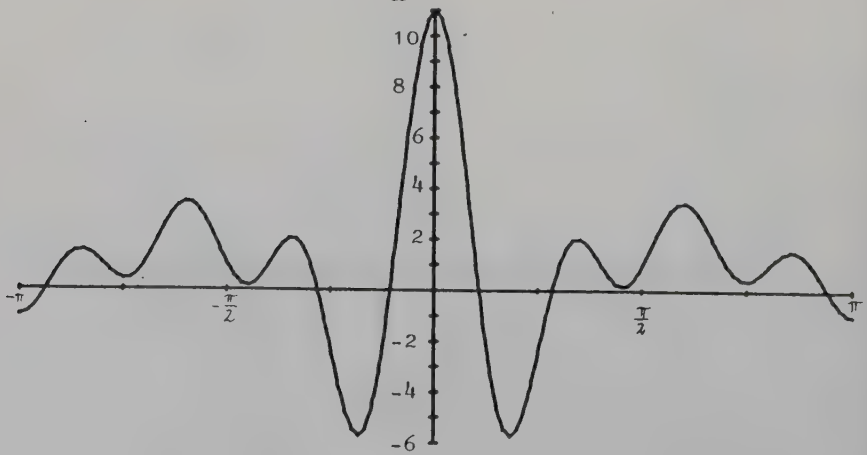
Für n≥6 sind hingegen wieder zu wenig Nullstellen vorhanden. D_6^* hat ebenfalls 8 Nullstellen:



Außerhalb der bis jetzt betrachteten Serie von Beispielen gibt es aber noch viele interessante Fälle. Für $K = \{|k| \leq 7, |k| \neq 2\}$ z. B. ist E_K ein 13-dimensionaler Raum, während D_K nur 6 Nullstellen hat. Also muß $\dim(\text{lin } \Delta_K) \geq 7$ gelten.

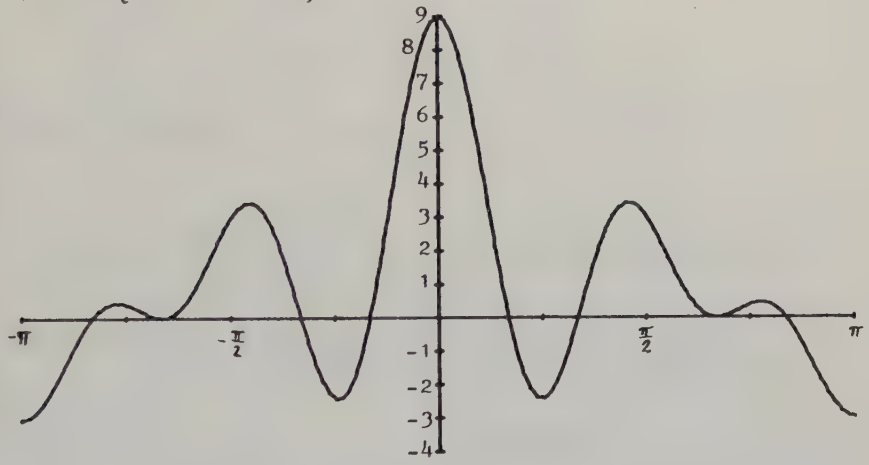


Für $K = \{|k| \leq 7, |k| \neq 1, 2\}$ hat D_K ebenfalls nur 6 Nullstellen, während $\dim(E_K) = 11$, also ist hier $\dim(\text{lin } \Delta_K) \geq 5$.

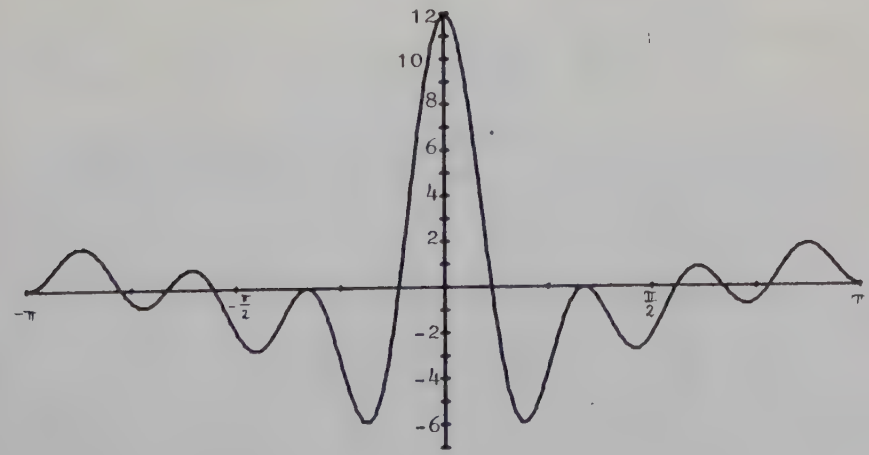


Die folgenden beiden Fälle zeigen, daß auch doppelte Nullstellen auftreten können. Das Problem der Eindeutigkeit ist dann jedoch etwas komplizierter.

a) $K = \{|k| \leq 5, |k| \neq 2\}$



b) $K = \{|k| \leq 7, |k| \neq 1, k \neq 0\}$



Im Fall a) hat D_K die einfachen Nullstellen

$$t_{1,2} = \pm \frac{\pi}{6}$$

$$t_{3,4} = \pm \frac{\pi}{3}$$

$$t_{5,6} = \pm \frac{5}{6}\pi ,$$

und die doppelten Nullstellen

$$t_{7,8} = \pm \frac{2}{3}\pi .$$

Um die Dimension von $\operatorname{lin} \Delta_K$ zu bestimmen, müssen wir die Überlegungen aus Kapitel 3 hier noch etwas ergänzen.

Da $\dim E_K=9$, gibt es einen mindestens dreidimensionalen Unterraum $U \subseteq E_K$, so daß für jedes $u \in U$ und $1 \leq i \leq 6$

$$u(t_i) = 0$$

gilt.
Gäbe es ein $u^* \in U$ mit $u^*(t) \geq 0$ in einer Umgebung von t_7 und in einer Umgebung von t_8, so gälte für kleine $\varepsilon > 0$:

$$D_K + \varepsilon u^* \in \Delta_K ,$$

und damit

$$\dim(\operatorname{lin} \Delta_K) > 1.$$

Analog zu (3.4) lösen wir deshalb die beiden Gleichungssysteme

i)
$$x_o + \frac{\sqrt{3}}{2} x_1 - \frac{1}{2} x_4 - \frac{\sqrt{3}}{2} x_5 = 0$$

$$x_o + \frac{1}{2} x_1 - x_3 - \frac{1}{2} x_4 + \frac{1}{2} x_5 = 0$$

$$x_o - \frac{\sqrt{3}}{2} x_1 - \frac{1}{2} x_4 + \frac{\sqrt{3}}{2} x_5 = 0$$

ii) $\frac{1}{2} y_1 + y_3 + \frac{\sqrt{3}}{2} y_4 + \frac{1}{2} y_5 = 0$

$\frac{\sqrt{3}}{2} y_1 \qquad - \frac{\sqrt{3}}{2} y_4 - \frac{\sqrt{3}}{2} y_5 = 0$

$\frac{1}{2} y_1 + y_3 - \frac{\sqrt{3}}{2} y_4 + \frac{1}{2} y_5 = 0.$

Für die Lösungen von i) gilt

$$x_1 = x_3 = x_5$$

$$x_4 = 2x_o,$$

und von ii)

$$y_1 = -y_3 = y_5$$

$$y_4 = 0;$$

da sowohl die Polynome

$$f_1(x) = \cos x + \cos(3x) + \cos(5x),$$

$$f_2(x) = 1 + 2\cos(4x),$$

als auch

$$f_3(x) = \sin x - \sin(3x) + \sin(5x)$$

bei $x=t_7$ und $x=t_8$ einfache Nullstellen haben, gibt es kein zu D_K linear unabhängiges dcU mit der geforderten Eigenschaft.

Also doch

$$\dim(\mathrm{lin}\,\Delta_K) = 1.$$

Literatur

[1] Berman, D.: Über eine Klasse linearer Operatoren. Dokl. Acad. Nauk SSSR. 85, 13-16 (1952).

[2] Cheney, E., C. Hobby, P. Morris, F. Wulbert and D. Schurer: On the Minimal Property of the Fourier Projection. Trans. Amer. Math. Soc. 143, 249-258 (1969).

[3] Cheney, E. and K. Price: Minimal Projections. Approximation Theory, Academic Press, 261-287 (1970).

[4] Dreseler, B. and W. Schempp: On the Charshiladze-Lozinski Theorem for Compact Topological Groups and Homogeneous Spaces. Man. Math., 13, 321-337 (1974)

[5] Lambert, P.: On the Minimal Norm Property of the Fourier Projection in L^1-Spaces and in Spaces of ContimuousFunctions. Bull. Amer. Math. Soc. 76, 790-804 (1970).

[6] Lambert, P.: Minimum Norm Property of the Fourier Projection in Spaces of ContimuousFunctions. Bull. de la Soc. Math. de Belgique 21, 359-369 (1969).

[7] Lorenz, F. und A. Schönhage: Über ein zahlentheoretisches Problem aus der Fourieranalysis. Math. Z. 120, 369-372 (1971).

[8] Lozinski, S.: Über eine Klasse linearer Operatoren. Dokl. Acad. Nauk SSSR. 61,193-196 (1948).

[9] Schumacher, R.: Zur Minimalität trigonometrischer Polynomoperatoren. Man. Math. 19, 133-142 (1976).

Lebenslauf

Robert Schumacher

19. 12. 1950	geboren in Stuttgart
Ostern 1957	Einschulung
Ostern 1961	Eintritt ins Progymnasium Hohenheim, seit 1966 Paracelsusgymnasium Hohenheim
ab WS 1969/70	Studium der Mathematik mit Nebenfach Physik in Tübingen
14. 3. 1972	Diplomvorprüfung
21. 10. 1975	Diplomprüfung
	seither Doktorand bei Prof. Dr. Schönhage
WS 75/76 bis SS 77	Wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut der Universität Tübingen
ab 1. 7. 1977	Wissenschaftlicher Assistent an der Universiät Osnabrück
seit 11. 8. 1978	verheiratet mit Marina geb. Dicke.